Zestaw nr 10. Przestrzenie wektorowe, układy wektorów, baza, wymiar

1. Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi odpowiednich przestrzeni liniowych:

   (a) $\{[x, y, z] \mid yz \leqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   (b) $\{[x, y, z] \mid x + y + z = x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   (c) $\{[x, y] \mid |x - y| \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   (d) $\{A \mid DetA = 0\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$
   (e) $\{\begin{pmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$
   (f) $\{[x, y] \mid x^2 + y^2 = 0 \text{ lub } x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   (g) $\{[x, y] \mid x^2 + y^2 = 0 \text{ i } x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

2. Wektory $\boldsymbol{v} = [1, 2, 3]$ oraz $\boldsymbol{u} = [1, 3, 5]$ przedstawić jako kombinacje liniowe wektorów:

   (a) $[2, 0, 6]$, $[0, 1, 0]$, $[1, -1, 3]$
   (b) $[2, 0, 6]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 1, 1]$

3. Zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

   (a) $\mathcal{B} = \{[1, 4], [2, 3], [1, 1], [5, 6]\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathcal{B} = \{[2, 0, 6], [0, 1, 0], [1, -1, 3]\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

4. Wiedząc, że wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{x}$ są liniowo niezależne, zbadać liniową niezależność wektorów:

   (a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$
   (b) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}$

5. Sprawdzić, czy następujące układy wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni:

   (a) $\mathcal{B} = \{[2, 5], [3, 1], [6, -7]\}$ w $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathcal{B} = \{[1, 0, 1], [1, 2, 2]\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (c) $\mathcal{B} = \{[1, 0, 1], [1, 2, 2], [0, 1, 1]\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (d) $\mathcal{B} = \{[1, 1, 0, 0], [1, -1, 0, 0], [1, 0, -1, 4], [0, 0, 0, -1]\}$ w $\mathbb{R}^4$

6. Wiedząc, że wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ tworzą bazę przestrzeni $V(\mathbb{K})$, zbadać czy wektory $\boldsymbol{u}$, $2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}$ też są bazą tej przestrzeni.

7. Znaleźć współrzędne wektora $\boldsymbol{v} = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 1, 0], [2, 1, 0], [3, 3, 1]\}$.

8. Podane zbiory wektorów uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni linowych:

   (a) $\{[2, 1, 0], [1, 1, 1]\}$ w $\mathbb{R}^3$
   (b) $\{[1, 3, 2, 1], [5, -4, 7, 1]\}$ w $\mathbb{R}^4$

9. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, podane zbiory wektorów stanowią bazę odpowiednich przestrzeni:

   (a) $\mathcal{B} = \{[p - 2, -p], [3, 2 + p]\}$ w $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathcal{B} = \{[1, 3, -p], [p, 0, -p], [1, 2, 1]\}$ w $\mathbb{R}^3$